$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(f^{-1}(y))-f(x_o)}{f^{-1}(y)-x_o}=\lim_{y\to y_o}\frac{y-y_o}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}$$

Cette limite etant supposée non nulle, d'apres le theoreme de l'inverse d'une limite,on a (en fait c'est le theoreme des compositions de fonction avec la fonction inverse, sur un point non nul donc ou la fonction onverse est definie)

$$\lim_{y\to y_o}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o}=\frac{1}{f'(x_o)},f'(x_o)\neq 0$$

Exemple :

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{(\tan y)'}$$

$\tan y = x$

$y = \arctan x$

d) Graphe

Soit $f\in C_m(I)$

Graphe de f $:=G_f=\{(x,f(x);x\in I\}$

Graphe de $f^{-1}:=G_{f^{-1}}=\{(y,f^{-1}(y));y\in f(I)\}=\{(f(x),x);x\in I\}$

$G_{f^{-1}}$ est donc le symetrique de G_f par rapport à la 1ere bissectrice

Dessin

3) Exemple

a) Fonction exponentielle et logarithme neperien.

$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ exp est continue et strictmenent monotone sur $\mathbb{R}$

$\exp(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*$

Elle admet une fonction reciproque qui est $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$

$(\forall x\in\mathbb{R},e^x=y)\Leftrightarrow(\forall y\in\mathbb{R}_+^*,x=\ln y)$

dessin

b) Fonction tangente et arctangente

$\tan:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, tan est continue et strictement monotone sur cet intervalle.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn